64. Reflexive vector lattice の norm に就て II

中野秀五郎

前談話に於ける最後の定理は拡張し得ることを注意したが、次に其大体を記すこととする。此定理は一般に space $\mathfrak{M}$ の汎連続線形汎函数の集合 $\overline{\mathfrak{M}}_0$ が $\mathfrak{M}$ の conjugate space $\overline{\mathfrak{M}}$ と一致する條件を求めることになる。此処に $\overline{\mathfrak{M}}$ とは、$\mathfrak{M}$ の任意の要素 $a \neq 0$ に對し、$\overline{a}(a) \neq 0$ なる汎連続線形汎函数 $\overline{a}$ が存在して 然かも $\overline{\mathfrak{M}}$ は、汎連続線形汎函数の全体なることを意味するものとする。又 $\overline{\mathfrak{M}}_0$ は、汎函数の大小の意味にて space をなしてゐると云ふ仮定の下にて 次の定理が成立する。

<u>定理</u>　$\overline{\mathfrak{M}}_0$ が $\overline{\mathfrak{M}}$ と一致する為の必要且充分なる條件は、

1) $\overline{\mathfrak{M}}_0 \ni \overline{a}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$, $\bigwedge_{\lambda} \overline{a}_\lambda = 0$ に對し、$\inf_{\lambda_\nu \in \Lambda,\ \nu = 1, 2, \cdots} \overline{a}_{\lambda_1} \frown \cdots \frown \overline{a}_{\lambda_\nu}(a) = 0$ $(\mathfrak{M} \ni a \geq 0)$.

2) $\overline{\mathfrak{M}}_0 \ni \overline{a}_\lambda \geq 0$ $(\lambda \in \Lambda)$ に對し $\sup_{\lambda_\nu \in \Lambda} \overline{a}_{\lambda_1} \smile \cdots \smile \overline{a}_{\lambda_\nu}(a) < +\infty$ ならば、$\overline{a}_\lambda \leq \overline{a}_0 \in \overline{\mathfrak{M}}_0$ なる $\overline{a}_0$ が存在し、

3) $\mathfrak{M} \ni a \neq 0$ に對し $\overline{a}(a) \neq 0$ にして、$|a| \frown |b| = 0$ ならば $\overline{a}(b) = 0$ なる $\overline{a} \in \overline{\mathfrak{M}}_0$ が存在することである。

此定理は前掲論文（中野秀五郎・東大紀要）にて明記してはないが、実質的には証明されてゐる。即ち kanonische Darstellung を考へれば明かであり、又直接にも証明される。次に $\mathfrak{M}$ に norm が与へられた時の以上の定理の変形に就て述べることゝする。

1° 先づ $\mathfrak{M}$ に norm が与へられ、$\mathfrak{M}$ が norm に関して complete なる場合を考へる。此場合には、

$$[*] \qquad \|\bar{a}\| = \sup_{\|a\| \leq 1} |\bar{a}(a)| < +\infty$$

として $\overline{\mathfrak{M}}_0$ に norm が定義されることは、既に前掲論文に出てゐる。然る時は　定理の条件 2) は次の条件と同等である。

2') $\overline{\mathfrak{M}}_0 \ni \bar{a}_\lambda \geqq 0$, $\sup \|\bar{a}_{\lambda_1} \smile \cdots \smile \bar{a}_{\lambda_\nu}\| < +\infty$ ならば、$\bar{a}_\lambda \leqq \bar{a}_0 \in \overline{\mathfrak{M}}_0$ なる $\bar{a}_0$ が存在する。

如何となれば 2) より 2') が出ることは明かである。故に 2') より 2) の出ることを証明する。$\bar{a}_{\lambda_1} \smile \cdots \smile \bar{a}_{\lambda_\nu}$ が $\bar{a}_\lambda$ の一つに含まれる場合を考へれば充分である。若しも $\sup_\lambda \bar{a}_\lambda(a) < +\infty$ $(a \geqq 0)$ にして、$\sup \|\bar{a}_\lambda\| = +\infty$ なるときは、$\bar{a}_{\lambda_1} \leqq \bar{a}_{\lambda_2} \leqq \cdots\cdots$ $\bar{a}_{\lambda_\nu}(a_\nu) > 2^{2\nu}$ なるが如き $\bar{a}_{\lambda_1}, \bar{a}_{\lambda_2}, \cdots$ 及び $a_\nu \geqq 0$, $\|a_\nu\| = 1$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ が得られる。然るときは $\sum_\nu \|\frac{1}{2^\nu} a_\nu\| < +\infty$ より $x_0 \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} a_\nu$ なる x_0 が存在する。此 x_0 に対しては $\bar{a}_{\lambda_\nu}(x_0) \geqq \frac{1}{2^\nu} \bar{a}_{\lambda_\nu}(a_\nu) > 2^\nu$ となり、仮定に反する。此の 1° の場合の応用として L-space の conjugate が M-space なることが知られる。勿論 L-space と M-space とが同一空間ならば任意でよい。

2° 更に $\overline{\mathfrak{M}}_0$ が norm に関して連続であるとする。即ち $\bar{a}_1 \geqq \bar{a}_2 \geqq \cdots$, $\frown \bar{a}_\nu = 0$ に対し $\lim_{\nu\to\infty} \|\bar{a}_\nu\| = 0$ である場合を考へる。此場合には条件 1) は必然的に満足されてゐる。如何となれば $\frown_\lambda \bar{a}_\lambda = 0$ に対し $\frown_{\nu=1}^{\infty} \bar{a}_{\lambda_\nu} = 0$ なる部分列が得られる。（中野秀五郎：Über die Stetigkeit des normierten teilweise geordneten Moduls, 学士院 19 (1943) 参照）又 2') は、

2'') $0 \leqq \bar{a}_1 \leqq \bar{a}_2 \leqq \cdots\cdots$, $\sup_\nu \|\bar{a}_\nu\| < \infty$ ならば $\bar{a}_\nu \leqq \bar{a}_0 \in \overline{\mathfrak{M}}$ なる $\bar{a}_0$ の存在にて置換へられる。此れも以上の論文に於けると同様に証明される

ことが既に注意されてゐる. 即ち $\alpha = \sup_{\lambda} \|a_\lambda\| < +\infty$ に對し

$$\|\bar{a}_{\lambda_{\nu+1}} - \bar{a}_{\lambda_\nu}\| \geqq \sup_{\bar{a}_\lambda \geqq \bar{a}_{\lambda_\nu}} \|\bar{a}_\lambda - \bar{a}_\lambda\| - \frac{1}{2^\nu}. \quad \bar{a}_{\lambda_1} \leqq \bar{a}_{\lambda_2} \leqq \cdots$$

なるが如き部分列 $\bar{a}_{\lambda_\nu}$ を考へるときは $\bar{a}_{\lambda_\nu} \leqq \bar{a}_0 \in \overline{\mathfrak{M}}_0$ なる $\bar{a}_0$ が存在し

$$\|(\bar{a}_\lambda \smile \bar{a}_{\lambda_\nu}) - \bar{a}_{\lambda_\nu}\| \leqq \sup_{\bar{a}_\lambda \geqq \bar{a}_{\lambda_\nu}} \|\bar{a}_\lambda - \bar{a}_{\lambda_\nu}\| \leqq \|\bar{a}_{\lambda_{\nu+1}} - \bar{a}_{\lambda_\nu}\| + \frac{1}{2^\nu}$$

より.

$$\|\bar{a}_\lambda \smile (\lim_{\nu\to\infty} \bar{a}_{\lambda_\nu}) - \lim_{\nu\to\infty} \bar{a}_{\lambda_\nu}\| = 0 \quad 即ち \quad \bar{a}_\lambda \leqq \lim_{\nu\to\infty} \bar{a}_{\lambda_\nu} \leqq \bar{a}_0$$

が得られる. 此 2° の場合の應用として L_p-space の conjugate が L_q-space なることが. Hölder の不等式により直ちに証明される.

(1947. 8. 29)